Démonstrations géométriques et vecteurs

Denis Tanguay
UQAM, département de mathématiques, section didactique
tanguay@math.uqam.ca

Comme on le sait, le programme *Mathématique 536* (MEQ, 1998) prévoit une introduction aux *vecteurs*. Celle-ci s'inscrit dans le cadre de l'*Objectif général 2*, « Accroître chez l'élève l'habileté à analyser des situations géométriques » (p. 27), dont l'importance relative est évaluée par le programme à 23%. L'*Objectif terminal 2.1* « Résoudre des problèmes de géométrie » (p. 28), qui s'y rapporte, sera atteint par l'élève qui saura démontrer des propositions et résoudre des problèmes, tant en géométrie euclidienne (travail sur les triangles et le cercle poursuivi en 536 sur une base plus formelle) qu'en géométrie vectorielle. Nous voulons, dans le présent article, nous attacher plus spécifiquement au sixième objectif intermédiaire : « Démontrer des propositions à l'aide des vecteurs » (p. 29). Une liste de dix propositions géométriques à démontrer à l'aide des vecteurs est donnée dans l'*Annexe 2* du programme (p. 42), mais on peut bien sûr supposer que d'autres propositions peuvent être travaillées. Parmi les propositions de l'*Annexe 2*, on trouve par exemple, *les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu et réciproquement* ou encore, *les médianes d'un triangle se rencontrent aux deux tiers de leur longueur à partir du sommet.*

On est à prime abord porté à penser que le recours aux vecteurs facilite la démonstration géométrique - *bête noire* de combien d'élèves?!! - en ce qu'il permet en quelque sorte « d'algébriser » la démonstration, de la ramener à des « calculs ». Mais les enseignants en exercice déchantent vite. Si l'élève moyen parvient généralement assez bien à traduire les hypothèses et la thèse (la proposition à montrer) vectoriellement, il ne sait absolument pas **comment diriger ses calculs**. Se basant sur les exemples abordés en classe ou dans le manuel, l'élève introduit au jugé de nouveaux points à l'aide de la règle de Chasles dans les égalités données par hypothèses ou à montrer, et se lance ensuite dans des calculs qui tournent le plus souvent en rond, faute de contrôle intuitif. La nervosité s'ajoutant en examen, l'élève pris de panique applique la règle de Chasles à répétition pour ajouter ou enlever des points, et voit avec désarroi l'expression de départ s'enfler et se réduire comme un accordéon, sans jamais aller là où il voudrait la mener.

Nous pensons que la méthode donnée ci-dessous peut permettre à l'élève de contrôler et diriger les calculs vectoriels en démonstration. Nous l'avons proposée à des étudiants de cégep et à d'autres en formation des maîtres à l'université (programme du BES). Sans avoir fait un relevé statistique systématique, nous pensons pouvoir affirmer qu'elle a permis d'améliorer sensiblement les performances des étudiants confrontés aux démonstrations géométriques à traiter vectoriellement. Avant de donner la méthode et de l'illustrer sur quelques exemples, rappelons la règle de Chasles[1]. Elle découle directement de la définition géométrique de l'addition des vecteurs à partir de leurs représentants : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}$, quels que soient les points A, B et X dans le plan.

En itérant son application, on peut montrer plus généralement que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \dots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nB}$$

ou encore que

$$\overrightarrow{AQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{Q_2Q_3} + \dots + \overrightarrow{Q_{m-1}Q_m} + \overrightarrow{Q_mA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

qu'on appelle pour des raisons évidentes la *règle du polygone fermé*.

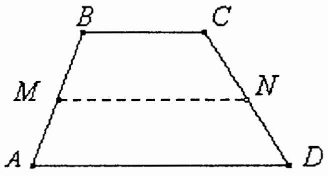
Soit un résultat de géométrie euclidienne à démontrer vectoriellement. La méthode de démonstration en cinq étapes va comme suit.

1. Traduire les hypothèses vectoriellement.
2. Traduire la thèse vectoriellement. Tenter de tout ramener à une ou plusieurs égalités vectorielles à montrer.
3. Partir du membre de gauche d'une des égalités à montrer; utiliser judicieusement la règle de Chasles ou les hypothèses pour introduire les vecteurs qui apparaissent dans le membre de droite.
4. « Ramasser » tout ce qui est en trop dans le membre de droite de l'égalité obtenue à l'étape 3 (en trop par rapport à l'égalité de l'étape 2 qu'on cherche à obtenir), et tenter de montrer qu'il s'agit du vecteur nul. Pour cela, transformer les vecteurs en trop (règle de Chasles, hypothèses, *en se guidant sur la figure pour diriger les calculs*) afin de les ramener à des vecteurs portés par les côtés du polygone donné au départ, le plus souvent un triangle ou un quadrilatère. Utiliser alors la règle du polygone fermé ou encore, s'arranger pour parcourir certains côtés du polygone dans un sens, puis dans l'autre, de façon à obtenir le vecteur nul. **Attention!** *Les hypothèses* **doivent** *être utilisées quelque part!*

5. Réappliquer 3 et 4 autant de fois qu'il y a d'égalités à montrer.

1er exemple

Soit ABCD un trapèze, avec AD parallèle à BC, et soient M et N les milieux des segments AB et CD respectivement. Montrer que MN est parallèle à AD et à BC, et que le longueur de $\overline{MN}$ est la moitié de la somme des longueurs de $\overline{AD}$ et de $\overline{BC}$.



1. Le fait que ABCD soit un trapèze se traduit vectoriellement par le fait que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont même direction. Le fait que M et N sont des points milieux peut se traduire par exemple par :

   $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

2. La thèse peut être ramenée à l'égalité $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

   En effet, comme $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont même direction, il en sera de même de toute combinaison linéaire de ces vecteurs, et l'égalité montrera que MN est parallèle aux droites AD et BC, qui portent $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$. Parce que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont même direction et même sens, on aura de plus que

   $$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)\right\|$$

   $$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AD}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|\right),$$

   ce qui représente bien le 2e volet de la thèse.

3. La première des deux égalités qui suivent est établie en vertu de la règle de Chasles, et permet d'introduire les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans le membre de droite :

   $$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$$

   $$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CN}$$

   Il suffit maintenant de montrer que

   $$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}.$$

4. Il faut ici se guider sur la figure pour chercher à ramener les vecteurs en cause à des vecteurs portés par les côtés du trapèze ABCD, afin d'appliquer la règle du polygone fermé; par exemple en remplaçant $\overrightarrow{MA}$ par $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CN}$ par $\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (hypothèses) et $\overrightarrow{DB}$ par $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$ (règle de Chasles). On aura alors :

   $$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CN}$$

   $$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

   $$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

   $$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

   $$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right)$$

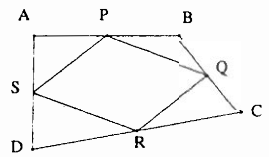
   $$= \vec{0},$$

   ce qui complète la démonstration.

Nous sommes bien conscients que la preuve obtenue n'est pas la plus simple possible. Dans le prochain exemple, l'égalité avec le vecteur nul à montrer à l'étape 4 est en fait la deuxième des deux égalités énoncées à l'étape 2, et l'organisation de la preuve pourra sembler passablement maladroite. Il faut bien comprendre que l'important n'est pas ici de rechercher l'élégance ou la concision, mais de *donner à l'élève une méthode qui lui permet de guider sa démarche et d'éviter de tourner en rond.*

2e exemple

Soit ABCD un quadrilatère convexe quelconque. Soient P, Q, R et S les milieux de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ et $\overline{DA}$, respectivement. Montrer que PQRS est un parallélogramme.



1. Traduire vectoriellement le fait que P, Q, R et S sont des points milieux peut se faire en posant par exemple :

   $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

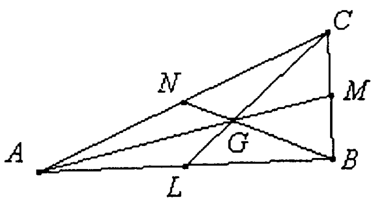
2. Montrer que PQRS est un parallélogramme revient à montrer que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$. Montrons la première de ces deux égalités en suivant la méthode.
3. Partant du membre de gauche, nous introduisons les points S et R ainsi que le vecteur $\overrightarrow{SR}$ à l'aide de la règle de Chasles : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RQ}$. Nous sommes ainsi ramenés à montrer que $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{RQ} = \vec{0}$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$, la deuxième des deux égalités à montrer! Il reste donc à montrer que $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{RQ} = \vec{0}$ en suivant les directives données à l'étape 4.
4. Ramenons-nous à des vecteurs portés par les côtés de ABCD et utilisons les hypothèses pour nous placer en position d'appliquer la règle du polygone fermé. Cela peut se faire à travers le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{RQ} &= \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS}\right) + \left(\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CQ}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BB}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Parmi les dix propositions de l'*Annexe 2* du programme 536 (MEQ), la plus difficile est sans doute celle qui fait l'objet de l'exemple suivant.

3e exemple

Soit ΔABC un triangle quelconque. Soient L, M, et N les milieux respectifs de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{CD}$. Montrer que les médianes $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ et $\overline{CL}$ sont concourantes en G, le centre de gravité de ΔABC, et que G est situé aux deux-tiers des longueurs de chaque médiane à partir du sommet.



1. Comme dans les exemples précédents, on a par hypothèse les égalités :

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$$

2. L'élève pourrait avoir de la difficulté à traduire le fait que les médianes sont concourantes par une égalité vectorielle. L'argument suivant pourrait lui donner à penser *qu'on utilise la proposition à montrer à l'intérieur de la démonstration.* Il s'agira de bien lui expliquer qu'il n'en est rien, en travaillant avec lui des raisonnements analogues ; un argument du même type permet par exemple de montrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Considérons l'unique point P de $\overline{AM}$ tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}(*)$.

   Si l'on montre que $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ et que $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CL}$ (**); on aura montré que les points B, P et N sont alignés (sans quoi $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{BN}$ n'étant pas de même direction, ils ne pourraient être multiple scalaire l'un de l'autre), de même que les points C, P et L. On pourra conclure que le point P coïncide avec le point G à l'intersection des médianes, et que ce point partage chaque médiane dans le rapport attendu. Le point est au départ dénoté P plutôt que G pour des raisons pédagogiques : tant que les deux égalités (**) n'ont pas été montrées, on ne peut présumer a priori que les points P et G ne font qu'un.
3. Montrons la première des deux égalités (**). Introduisons le point N en appliquant la règle de Chasles au membre de gauche :

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NP}.$$

   Il suffit maintenant de montrer que $\frac{1}{3}\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$.
4. Comme précédemment, nous allons tenter de ramener les vecteurs en cause à des vecteurs portés par les côtés du ΔABC, faisant intervenir les hypothèses auxquelles nous pouvons ajouter l'égalité (*) en toute légitimité : nous avons choisi le point P pour que cette égalité soit vraie! Cela suggère d'introduire le point A par la règle de Chasles, de façon à pouvoir remplacer $\overrightarrow{AP}$ par $\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, comme nous le faisons dans la 2e égalité ci-dessous. Ce vecteur pourra à son tour être ramené aux côtés de ΔABC par la règle de Chasles : c'est ce que nous faisons dans la 3e égalité ci-dessous. Nous faisons finalement intervenir les hypothèses dans la 5e égalité pour être en position d'appliquer la règle du polygone fermé :

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\right)+\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AP}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{NA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$$

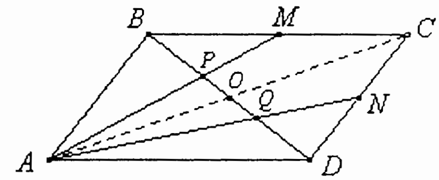
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$$

$$=\vec{0}$$

5. L'égalité $\overrightarrow{CP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CL}$ se montre comme à l'étape 4, en remplaçant partout B par C et N par L.

Le lecteur pourra vérifier que la plupart des propositions géométriques à démontrer vectoriellement, proposées dans les manuels du secondaire ou dans l'*Annexe 2* du programme 536, permettent de mettre la méthode à profit; sauf bien sûr ces propositions où doit intervenir le *produit scalaire*, par exemple celles où l'on doit établir l'orthogonalité entre deux segments. Mentionnons également que la proposition 10 de l'*Annexe 2*, *dans un parallélogramme, si l'on joint un sommet aux milieux des côtés non adjacents, on coupe la diagonale opposée en trois segments isométriques*, s'obtient difficilement par une application directe de la méthode. Mais nous relevons qu'elle résulte presque directement du fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, et du résultat établi dans notre exemple 3. Il suffit en effet de constater que dans la figure ci-dessous, $\overline{AM}$ et $\overline{BO}$ sont médianes de ΔABC et que $\overline{AN}$ et $\overline{DO}$ sont médianes de ΔACD.



On en déduit les égalités

$$\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)=$$
$$-\frac{2}{3}\overrightarrow{DO}=-\overrightarrow{DQ}$$

qui sont suffisantes pour conclure.

[1] Michel Chasles (1793-1980) est un mathématicien français. Il ne faut prononcer ni l'un ni l'autre des deux « s » ; on doit dire « Châle » comme on dit « château » qu'on écrivait « chasteau » au XVIIIe siècle, tout comme « hôpital » et « île » s'écrivaient « hospital » et « isle ».

LES PRIX DU GRMS

Prix Claude Janvier

Prix d'excellence du GRMS.
Les candidatures sont présentées par les régions selon les critères établis.

Prix Fermat

Prix pour le meilleur scénario d'enseignement (1er et 2e cycle)

Prix Euler

Prix pour les auteurs de la revue.

Prix Descartes

Prix remis à cinq diplômés(es) (une personne par université participante) dans le programme d'enseignement des mathématiques au secondaire.

Plus de détails à la page 54 de cette revue.