MATHEMATIQUES

LA REDACTION ET LA PRESENTATION SONT PRISES EN COMPTE POUR 4 POINTS.

LES CALCULATRICES SONT AUTORISEES.

DUREE : 2 HEURES.

IMPORTANT :

L'énoncé (pages 2, 3, 4) est complété par une feuille annexe (page 5) qu'il faudra rendre avec la copie.

21 DN 120

Activités numériques (12 points).

Dans toute cette partie, les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés d'explications, le barème en tiendra compte.

Exercice 1.

On considère les trois nombres A, B, C : $A = \frac{7}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{11}{6}$; $B = 2\sqrt{5} - \sqrt{20} - 3\sqrt{45}$; $C = \frac{4 \times 10^{14} \times 12}{3 \times 10^{11}}$.

1) Calculer et donner A sous forme d'une fraction irréductible.
2) Ecrire B sous la forme $a\sqrt{5}$, a étant un nombre entier relatif.
3) Donner l'écriture scientifique de C.

Exercice 2.

On considère l'expression D = $(4x-1)^2 + (x+3)(4x-1)$.

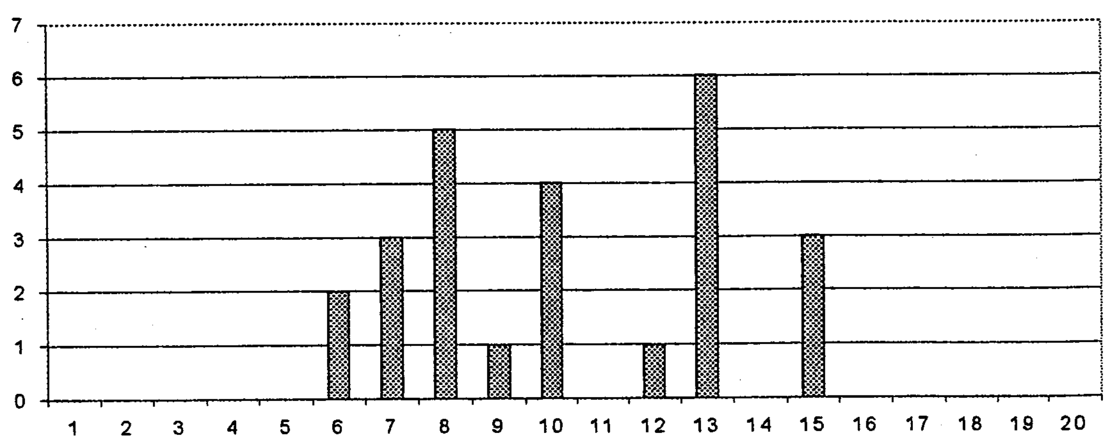
1) Développer puis réduire D.
2) Factoriser D.
3) Résoudre l'équation : $(4x-1)(5x+2) = 0$.

Exercice 3.

1) Calculer le plus grand diviseur commun de 540 et 300.
2) Une pièce rectangulaire de 5,40 m de long et de 3 m de large est recouverte, sans découpe, par des dalles de moquette carrées, toutes identiques.
   a) Quelle est la mesure du côté de chacune de ces dalles, sachant que l'on veut le moins de dalles possibles ?
   b) Calculer alors le nombre de dalles utilisées ?

Exercice 4.

Voici le diagramme représentant la répartition des notes obtenues par les élèves d'une classe de troisième lors d'un contrôle de français : les notes sur 20 sont reportées en abscisses, le nombre d'élèves est reporté en ordonnées :



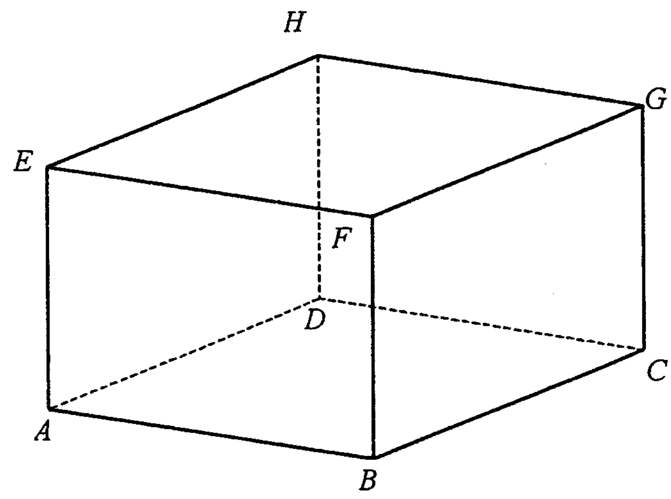
1) Quel est l'effectif de cette classe de troisième ?
2) Calculer la moyenne des notes obtenues en donnant le résultat sous sa forme décimale exacte.

Activités géométriques (12 points)

Exercice 1.

ABCDEFGH est un parallélépipède à base carrée.

On donne $AB = BC = 6$ cm et $BF = 4{,}5$ cm.



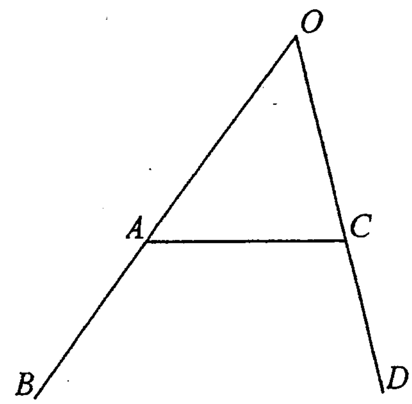
1) Montrer que $DG = 7{,}5$ cm.
2) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CDG}$ arrondie au degré.
3) Calculer, en cm^3, le volume de la pyramide *ABCDG*.

Exercice 2.

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, le point *A* est sur le segment [*OB*] et le point *C* est sur le segment [*OD*].

On donne :

$OA = 8{,}5$ cm ; $AB = 11{,}5$ cm ; $OC = 5$ cm ; $CD = 7$ cm.



1) Calculer les longueurs *OB* et *OD*.
2) Les droites (*AC*) et (*BD*) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Exercice 3.

Les constructions demandées dans cet exercice sont à réaliser sur la feuille annexe.

Laisser les traces de construction visibles.

Sur la figure de l'annexe 1, on a représenté un parallélogramme *ABCD* de centre *O*.

Les droites (*BC*) et (*AC*) sont perpendiculaires.

1) Tracer le cercle qui contient les trois points *O*, *B* et *C*. Justifier la position de son centre *I*.
2) Placer les points *M* et *P* tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD}$.
3) Utilisation d'une transformation.

   a) Par quelle transformation a-t-on à la fois : *O* a pour image *C* et *B* a pour image *M* ?

   b) Montrer que, par cette transformation, le point *D* a pour image le point *P*.

   c) Montrer que les points *P*, *C*, *M* sont alignés.

Problème (12 points)

Un viticulteur propose un de ses vins aux deux tarifs suivants :

- **Tarif 1** : 7,5 euros la bouteille, transport compris.
- **Tarif 2** : 6 euros la bouteille, mais avec un forfait de transport de 18 euros.

1) Remplir le tableau donné sur la feuille annexe.
2) Exprimer le prix payé par le consommateur en fonction du nombre x de bouteilles achetées.

   Pour le tarif 1, le prix sera noté P_1.

   Pour le tarif 2, le prix sera noté P_2.
3) Tracer, sur une feuille de papier millimétré, les représentations graphiques des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 7,5x \text{ et } g(x) = 6x + 18,$$

pour des valeurs de x comprises entre 0 et 15.

On placera l'origine dans le coin inférieur gauche de la feuille et on prendra les unités suivantes :

- Sur l'axe des abscisses : 1 cm représente 1 bouteille.
- Sur l'axe des ordonnées : 1 cm représente 10 euros.

Pour les questions 4 et 5, on laissera sur le graphique les traits de rappel utilisés pour faciliter la lecture.

4) *Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique* :

   a) On veut acheter 6 bouteilles. Quel est le tarif le plus avantageux ?

   b) On dispose de 70 euros. Lequel des deux tarifs permet d'acheter le plus grand nombre de bouteilles ?

   Préciser ce nombre de bouteilles.

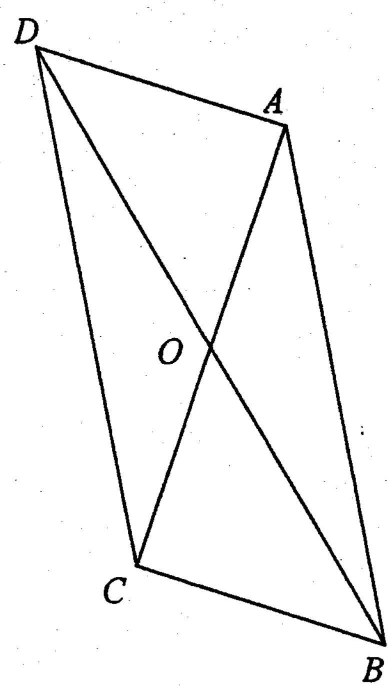
5) *Utilisation du graphique, vérification par le calcul.*

   a) Déterminer graphiquement pour combien de bouteilles le prix de revient est identique, quel que soit le tarif choisi. Donner ce nombre de bouteilles.

   Quel est le prix correspondant ?

   b) Vérifier ces deux derniers résultats par des calculs.

Exercice 3 des activités géométriques



Problème : question 1)

Tableau à compléter :

Nombre de bouteilles	**1**	**5**			**15**
Prix au tarif 1 en €	**7,5**			**97,5**	
Prix au tarif 2 en €		**48**	**78**		

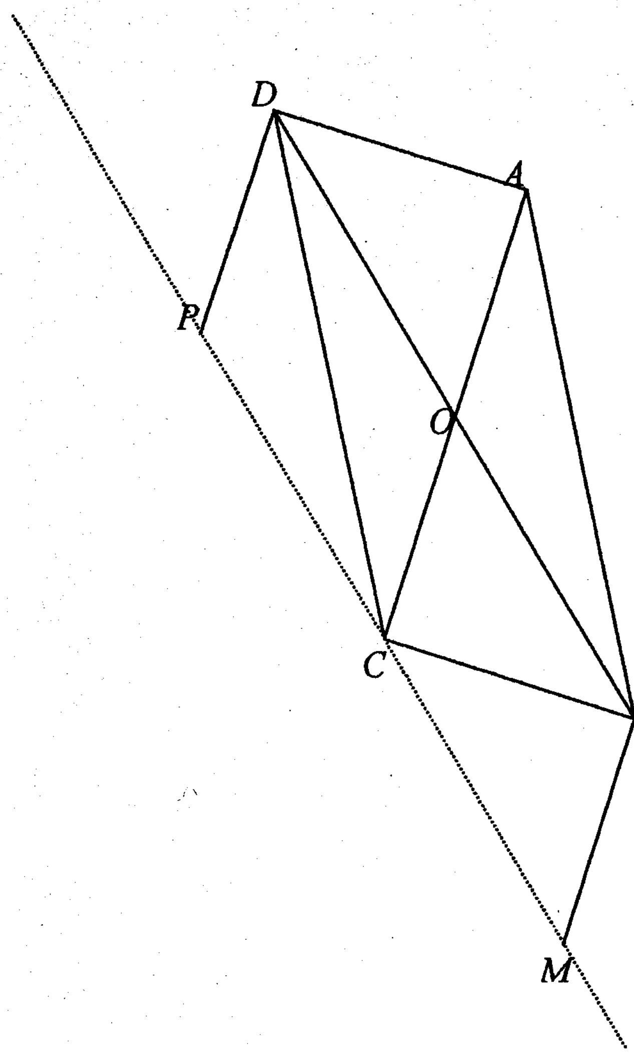
CORRIGE			
Exercice	Question		Barème proposé
Activités Numériques			
Exercice 1	1)	$A=\frac{7}{5}+\frac{11}{10}=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$.	1
	2)	$B=2\sqrt{5}-2\sqrt{5}-9\sqrt{5}=-9\sqrt{5}$.	1
	3)	$C=\frac{48\times10^{14}}{3\times10^{11}}=16\times10^{3}=1,6\times10^{4}$.	1
Exercice 2	1)	$D=16x^2-8x+1+\left(4x^2+11x-3\right)=20x^2+3x-2$.	1
	2)	$D=(4x-1)\left[(4x-1)+(x+3)\right]=(4x-1)(5x+2)$.	1
	3)	Un produit de facteurs est nul si et seulement si un au moins des facteurs est nul : on a donc : $(4x-1)(5x+2)=0 \Leftrightarrow 4x-1=0$ ou $5x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$ ou $x=-\frac{2}{5}$. Les deux solutions cherchées sont : $x=\frac{1}{4}$ $x=-\frac{2}{5}$.	1,5
Exercice 3	1)	Avec l'algorithme d'Euclide (méthode des différences) : PGCD(540,300) = PGCD(300,240) = PGCD(240,60) = 60 car 60 divise 240.	1,5
	2)a)	Les dalles sont carrées et identiques : soit x la mesure commune, en centimètres des côtés. x doit diviser 540 et 300 d'une part, x doit être la plus grande possible d'autre part : x est donc le PGCD (540,300) = 60.	1
	2)b)	Le nombre de dalles sur la longueur est : 540/60 = 9, le nombre de dalles sur la largeur est 300/60 = 5 : en tout, il y a 45 dalles.	0,5
Exercice 4	1)	Par lecture des ordonnées, l'effectif n est égal à : $2+3+5+1+4+1+6+3=25$ élèves.	1
	2)	La moyenne est donnée par $m=\frac{2\times6+3\times7+5\times8+1\times9+6\times13+3\times15}{25}=10,28$.	1,5
Activités géométriques			
Exercice 1	1)	Le triangle DHG est rectangle en D. Le théorème de Pythagore permet d'écrire : $DG=\sqrt{DH^2+DC^2}=\sqrt{20,25+36}=\sqrt{56,25}=7,5$ cm.	1,5
	2)	Dans le triangle DCG, rectangle en C, on a : $\cos\left(\widehat{CDG}\right)=\frac{DC}{DG}=\frac{6}{7,5}=0,8$ d'où : $\widehat{CDG}=37°$ (mesure arrondie au degré).	1
	3)	Le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide est donné par : $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times[\mathcal{A}(ABCD)\times CG]=\frac{1}{3}(36\times4,5)=54$ cm^3.	1

60

Exercice 2	1)	Le point A appartient au segment $[OB]$, donc $OB = OA + AB = 20$ cm. De même : $OD = 12$ cm.	1
	2)	Les points alignés O, A, B, d'une part, O, C, D, d'autre part sont dans le même ordre. De plus : $\frac{OA}{OB} = \frac{8,5}{20} = 0,425$ et $\frac{5}{12} = 0,417$ (résultat arrondi à trois décimales) : la réciproque du théorème de Thalès nous permet d'affirmer que les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.	2
Exercice 3	1)	Le triangle OCB est par hypothèse rectangle en C. Son cercle circonscrit est donc centré au milieu I de l'hypoténuse $[OB]$.	1
	2)	Construction de M : Construction de P :	1
	3)a)	Par construction de M, le quadrilatère $COBM$ est un parallélogramme, on a en particulier : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BM}$. La translation t qui transforme O en C transforme aussi B en M.	1
	3)b)	Puisque O est le milieu du segment $[BD]$, on a $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ et l'égalité $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD}$ devient $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO}$. Cette dernière égalité signifie que le quadrilatère $CBOP$ est un parallélogramme et on a : $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CP}$. Dans le nouveau parallélogramme $OADP$, on peut écrire $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DP}$ et affirmer que la translation t transforme aussi D en P.	1,5
	3)c)	La translation t transforme les trois points alignés B, O, D en respectivement M, C, P. Une translation transforme une droite en une droite, les points M, C, P sont donc alignés.	1
Problème			
	1)	Voir feuille annexe	2
	2)	$P_1 = 7,5x$ $P_2 = 6x + 18$.	2
	3)	Tracé des deux courbes.	3
	4)a)	Pour 6 bouteilles, le tarif le plus avantageux est le tarif 1.	1
	4)b)	Avec 70 euros, le tarif permettant d'acheter le plus grand nombre de bouteilles est le tarif 1. Le nombre demandé est 9.	1
	5)a)	Avec l'intersection des deux droites, on lit graphiquement $x = 12$ et $P_1 = P_2 = 90$ euros.	1
	5)b)	On résout le système : $\begin{cases} y = 7,5x \\ y = 6x + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7,5x \\ 7,5x = 6x + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7,5x \\ 1,5x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 90 \\ x = 12 \end{cases}$, calculs qui confirment ce qui précède.	2

Feuille annexe à rendre avec la copie

Exercice 3 des activités géométriques



Problème : question 1)

Tableau à compléter :

Nombre de bouteilles	1	5	10	13	15
Prix au tarif 1 en €	7,5	37,5	75	97,5	112,5
Prix au tarif 2 en €	24	48	78	96	108

Problème : questions 3), 4), 5).